INVESTIGACIÓN & DESARROLLO, No. 3, Vol. 1: 71 – 79 (2003)
ISSN 1814-6333

EL ÁLGEBRA LINEAL Y EL PROBLEMA DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Santiago Relos Paco
Universidad Privada Boliviana
srelos@upb.edu

(Recibido el 5 junio 2003, aceptado para publicación el 10 de agosto 2003)

RESUMEN

En este artículo se presenta una aplicación del álgebra lineal al problema de máximos y mínimos de funciones a varias variables. Se considera una función $f : U \subset \Re^n \to \Re$, U abierto y f dos veces diferenciable, se toma un punto $a \in U$ tal que $f'(a) = 0$, se plantea el problema de determinar si en este punto existe un máximo, mínimo o ninguna de estas situaciones. Se calcula $f''(a) = 0$, como se sabe esta segunda derivada es una matriz simétrica en $M_{n,n'}$, dependiendo de la signatura de $f''(a) = 0$ se dará una respuesta al problema planteado.

Palabras Clave: Algebra Lineal**,** Máximos y Mínimos**,** Autovalores y Autovectores.

1. INTRODUCCIÓN

Este problema se puede resolver empleando determinantes o empleando congruencia de matrices. Como el cálculo de determinantes tiene un altísimo costo computacional, usualmente se emplea para casos de dos variables (el empleado en los textos básicos de cálculo), en tanto que la congruencia de matrices es siempre viable aun cuando *n* es muy grande pues se basa en simples operaciones elementales de fila. Finalmente, el propósito de este artículo, es presentar el problema de máximos y mínimos como un problema que no depende de cantidad de variables (al menos no conceptualmente).

2. DEFINICIONES INICIALES

Iniciamos este artículo con una breve introducción a los autovalores y autovectores, más detalles se pueden encontrar en la bibliografía [1, 6-7].

2.1 Autovalores y autovectores

Definición 1.1. (Autovalores y Autovectores) Un vector no nulo v y un número λ son llamados respectivamente autovector y autovalor asociados de una matriz $A \notin M_{n,n'}$ si

$$Av = \lambda v$$

Teorema 1.1 Los autovalores de $A \in M_{n,n'}$ son las soluciones de la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = 0$$

,

donde $I \in M_{n,n'}$ es la matriz identidad.

Ejemplo 1.1 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Un simple cálculo da:

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 15\lambda\,,$$

por tanto el polinomio característico es $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 15\lambda = 0$, resolviendo esta ecuación se encuentran los autovalores:

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5$$

DOI: 10.23881/idupbo.003.1-8i

Los autovalores de una matriz no necesariamente son reales, sin embargo para el caso de matrices simétricas se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.2. Los autovalores de una matriz simétrica son todos reales.

2.2 La signatura de una matriz simétrica

Definición 1.2. (Signatura) La signatura de una matriz simétrica *A* [2], denotada por *sig*(*A*) es el par (*p*,*q*) donde *p* es el número de autovalores positivos y *q* el número de autovalores negativos.

Ejemplo 1.2. La signatura de la matriz del ejemplo 1.1 es *sig*(*A*)=(1,1) ques se tiene un autovalor positivo y un autovalor negativo.

La signatura puede calcularse sin necesidad se calcular los autovalores, como se puede deducir del siguiente teorema[1].

Teorema 1.3. Sea $A \in M_{n,n'}$ una matriz simétrica. Sea *D* la matriz diagonal obtenida de A aplicando las mismas operaciones elementales de fila y columna simultáneamente. Entonces: *sig*(*A*) = (*p*,*q*) donde *p* es el número de entradas positivas de *D* *y q* el número de entradas negativas.

Ejemplo 1.3 Considere la matriz del ejemplo 1.1, aplicando operaciones elementales se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{F_{21(-1/2)}} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5/2 & -5/2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{C_{21(-1/2)}}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5/2 & -5/2 \\ 3 & -5/2 & 2 \end{pmatrix}_{F_{31(-3/2)}} \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5/2 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & 2 \end{pmatrix}_{C_{31(-3/2)}}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5/2 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & 2 \end{pmatrix}_{F_{32(-1)}} \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{C_{32(-1)}}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{C_{32(-1)}}$$

luego *sig*(*A*)=(1,1).

2.3 Matrices definida positivas y definida negativas

Definición 1.3 (Matrices definidas) Sea $A \in M_{n,n'}$ una matriz simétrica. Se dirá que *A* definida positiva (respectivamente definida negativa) si *sig*(*A*)=(*n*,0) (respectivamente, *sig*(*A*)=(0,*n*)).

Ejemplo 1.4 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Realizando las operaciones elementales $F_{21(1/2)}, C_{21(1/2)}, F_{31(1)}, C_{31(1)}, F_{32(2/3)}, C_{32(2/3)}$, se encuentra:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}$$

[1]Existe otro teorema basado en el uso exclusivo de la tercera operación elemental de fila

por tanto la signatura es $sig(A)$=(3,0), luego A es definida positiva.

Ejemplo 1.5. Se puede probar que la signatura de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

es $sig(A)$=(0,3), luego A es definida negativa.

2.4 Matrices semidefinidas

Definición 1.4. (Matrices semidefinidas) Sea $A \in M_{n,n}$ una matriz simétrica. Se dirá que A semidefinida positiva (respectivamente, semidefinida negativa) si $sig(A)=(p,0)$, con $p<n$ (respectivamente, $sig(A)=(0,q)$, con $q<n$)

Ejemplo 1.6. Mediante las operaciones elementales $F_{31(1)}, C_{31(1)}, F_{32(-1)}, C_{32(-1)}$, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es congruente con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto, $sig(A)$=(2,0), luego A es semidefinida positiva.

Ejemplo 1.7. Se puede probar que la signatura de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es $sig(A)$=(2,1), luego A no es definida ni semidefinida.

2.5 Formas cuadráticas reales

2.5.1 La definición de una forma cuadrática

Definición 1.5. (Formas cuadráticas) Una forma cuadrática en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un polinomio de la forma

$$x^t A x$$

Con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $A \in M_{n,n}$ una matriz simétrica con entradas reales.

Ejemplo 1.8. Considere la matriz del ejemplo **1.4,** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ se tiene la forma cuadrática:

$$F = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nótese que un cálculo directo da: $F = 4x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_3^2$.

2.5.2. Formas cuadráticas definidas y semidefinidas

En las siguientes definiciones $x \in \Re^n$, $A \in M_{n,n}$ es una matriz simétrica.

Definición 1.6 **(**Formas cuadráticas definidas) Una forma cuadrática $x^t Ax$ es definida positiva (respectivamente definida negativa) si $x^t Ax > 0$ para todo $x \neq 0$, (respectivamente, $x^t Ax < 0$ para todo $x \neq 0$).

Definición 1.7 **(**Formas cuadráticas semidefinidas) Una forma cuadrática $x^t Ax$ es semidefinida positiva (respectivamente semidefinida negativa) si $x^t Ax \geq 0$ para todo $x \neq 0$, (respectivamente, $x^t Ax \leq 0$ para todo $x \neq 0$).

Teorema 1.4. Una forma cuadrática $x^t Ax$ es

- Definida positiva si y solamente si A es definida positiva
- Definida negativa si y solamente si A es definida negativa
- Semidefinida positiva si y solamente si A es semidefinida positiva
- Semidefinida negativa si y solamente si A es semidefinida negativa

Ejemplo 1.9. Considere la matriz del ejemplo 1.4, $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ se tiene la forma cuadrática:

$$F = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nótese que un cálculo directo da: $F = 4x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_3^2$.

En el ejemplo 1.4, se muestra que la signatura es *sig*(*A*) = (3,0), es decir *A* es definida positiva, por tanto la forma cuadrática es definida positiva, por tanto:

$$4x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 + 8x_3^2 > 0, \ \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. LA DERIVADA DE FUNCIONES A VARIAS VARIABLES

3.1 La primera derivada

A continuación definimos la derivada de una función a *n* variables. En lo que sigue un elemento de $\Re^n$ se considerará como un vector columna, es decir, una matriz en $M_{n,1}$.

Definición 2.1. (Derivada) Sea $f : U \subset \Re^n \to \Re$ una función, sea $x \in U$ y $h \in \Re^n$ tal que:

$$x + h \in U \text{ y } f(x+h) - f(x) = Ah + \varphi(x;h)h$$

donde *A* no depende de las componentes de *h*.

Si $\lim_{h \to 0} \varphi(x;h) = 0$, entonces la derivada de *f* en *x*, denotada por $f'(x)$, es *A*, es decir, $f'(x) = A$, en estas condiciones, diremos que *f* es diferenciable en *x*.

Se observa que de la definición se sigue que $f'(x) \in M_{1,n}$ *, es decir, la derivada de una función a n variables es un vector fila de* n *componentes*.

La definición anterior no es tan simple de aplicar cuando las funciones son algo complicadas, en la práctica se emplea el siguiente teorema.

Teorema 2.1. Sea $f : U \subset \Re^n \to \Re$ una función en las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferenciable en ***a***, entonces

$$f'(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(a)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \right)$$

donde $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ es la derivada parcial de f respecto de x_i evaluado en ***a***.

Ejemplo 2.1. Considérese la función

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 + x^2 - 4xz + 4z^2 + y^2 + 2xy + 2x - 4z + 2y$$

La derivada es:

$$f'(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

donde:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 2x - 4z + 2y + 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y + 2y + 2x + 2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -4x + 8z - 4 \end{cases}$$

3.2 La segunda derivada

No es intención de este artículo discutir detalles del cálculo de la segunda derivada de una función a varias variables (esto se puede encontrar en la bibliografía), para ser breve se indica la manera de calcularla. Sea $f : U \subset \Re^n \to \Re$ la segunda derivada de *f*, en el punto $x \in U$, denotada por $f''(x)$ es la matriz en $M_{n,n}$ cuya *i*-ésima fila está compuesta con las componentes de la derivada de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Ejemplo 2.2. Considérese la función del ejemplo 2.1

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 + x^2 - 4xz + 4z^2 + y^2 + 2xy + 2x - 4z + 2y$$

Las derivadas parciales son:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 2x - 4z + 2y + 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y + 2y + 2x + 2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -4x + 8z - 4 \end{cases}$$

por tanto, la segunda derivada es:

$$f''(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2y^2+2 & 4xy+2 & -4 \\ 4xy+2 & 2x^2+2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

3.3 Diferenciales

3.3.1 La primera diferencial

Si $f: U \subset \Re^n \to \Re$ es diferenciable en $a \in U$, entonces la diferencial en este punto es:

$$df(a) = f'(a)dx$$

donde,

$$dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.3. Considérese la función $f(x,y,z) = x^3y^2 + z^2$

la primera derivada es:

$$f'(x,y,z) = (3x^2y^2, 2x^3y, 2z)$$

calcularemos la diferencial de f en $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La derivada evaluada en este punto es:

$$f'(2,-1,1) = (12,-16,2)$$

por tanto la diferencial en a es:

$$df(a) = (12,-16,2)\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 12dx - 16dy + 2dz$$

3.3.2 La segunda diferencial

Ejemplo 2.4. Considérese la función del ejemplo 2.1

$$f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2 - 4xz + 4z^2 + y^2 + 2xy + 2x - 4z + 2y$$

se ha establecido que:

$$f''(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2y^2+2 & 4xy+2 & -4 \\ 4xy+2 & 2x^2+2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

calcularemos la segunda diferencial en el punto $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$f''(1,-1,1)=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

por tanto la segunda diferencial es:

$$d^2 f(1,-1,1) = (dx, dy, dz)\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 4(dx)^2 - 4(dx)(dy) - 8(dx)(dz) + 4(dy)^2 + 4(dz)^2$$

4 . MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES A VARIAS VARIABLES

4.1 Introducción

Definición 3.1. (Maximo y mínimo) Una función $f : U \subset \Re^n \to \Re$ tiene un máximo (respectiva mente un mínimo) en $a \in U$ si $f(a) \geq f(x)$ (respectivamente, si $f(a) \leq f(x)$ $\forall x \in U$ [3-5].

Definición 3.2. (Máximo y mínimo local) Una función $f : U \subset \Re^n \to \Re$ tiene un máximo local (respectiva mente un mínimo local) en $a \in U$ si existe un conjunto abierto ***O*** tal que f tiene un máximo (respectivamente un mínimo) en $U \cap O$. El punto ***a*** se llamará **extremo local**.

En la siguiente sección se presenta un teorema que nos da luces para encontrar los extremos locales de una función a varias variables.

4.2 Condición necesaria de extremo

Teorema 3.1. Considérese una función $f : U \subset \Re^n \to \Re$ donde U es un conjunto abierto. Sea f diferenciable en U tal que f tiene un extremo local en ***a*** entonces $f'(a) = 0$, esto es, todas las derivadas parciales en el punto ***a*** son nulas, es decir,

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x} = 0 \quad \text{para} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

.

Los puntos ***a*** en donde $f'(a) = 0$ se llaman *puntos críticos*.

Observación. Nótese que, en un dominio abierto, el teorema anterior (en su forma contrapositiva) nos dice que si $f'(a) \neq 0$ entonces en a no se pueden tener extremos locales, esto significa que los extremos locales de una función f definida en un dominio abierto se encuentran en los puntos donde la derivada es nula, es decir, los puntos en donde todas las derivadas parciales son cero.

4.3 Condición suficiente de extremo

En esta sección acudiremos a la segunda diferencial para decidir si en un punto crítico existe o no un máximo local, mínimo local o punto silla. Recordemos que la segunda diferencial es una forma cuadrática cuya matriz asociada es la segunda derivada de *f*.

Teorema 3.2. Sea $U \subset \Re^p$ un conjunto abierto, $f : U \to \Re$ diferenciable dos veces en *U*. Sea *a* un punto crítico, esto es, $f'(a) = 0$. Sea $dx = (dx_1,\ldots,dx_n)$. Entonces:

- Si $d^2 f(a)(dx)$ es definida positiva, *f* tiene en *a* un mínimo local.
- Si $d^2 f(a)(dx)$ es definida negativa, *f* tiene en *a* un máximo local.
- Si $d^2 f(a)(dx)$ no es definida negativa ni semidefinida, en *a* no se tiene un extremo.
- Si $d^2 f(a)(dx)$ es semidefinida entonces el método no da ninguna información.

Como se sabe, en el anterior teorema es suficiente analizar la matriz $f''(x)$ así se tiene el siguiente teorema equivalente.

Teorema 3.3. Sea $U \subset \Re^p$ un conjunto abierto, $f : U \to \Re$ diferenciable dos veces en *U*. Sea *a* un punto crítico, esto es, $f'(a) = 0$. Entonces:

- Si $f''(a)$ es definida positiva *f* tiene en *a* un mínimo local
- Si $f''(a)$ es definida negativa, *f* tiene en *a* un máximo local.
- Si $f''(a)$ no es definida negativa ni semidefinida, en *a* no se tiene un extremo.
- Si $f''(a)$ es semidefinida entonces el método no da ninguna información.

Ejemplo 3.1. Se calcularán los máximos y mínimos locales de

$$f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2 - 4xz + 4z^2 + y^2 + 2xy + 2x - 4z + 2y$$

- Cálculo de derivadas parciales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 2x - 4z + 2y + 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 2y + 2x + 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -4x + 8z - 4 \end{cases}$$

- Cálculo de puntos críticos

  Los puntos críticos son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} xy^2 + x - 2z + y + 1 = 0 & (1) \\ x^2y + y + x + 1 = 0 & (2) \\ -x + 2z - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

  de la tercera ecuación se obtiene

$$z = \frac{x+1}{2} \qquad (4)$$

  reemplazando este resultado en la primera y segunda ecuaciones se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} y(xy+1) = 0 & (4) \\ x^2y + y + x + 1 = 0 & (5) \end{cases}$$

  - De (5), si $y = 0$, reemplazando en (6) y luego empleando (4) se obtiene $x = -1$ y $z = 0$ así se obtiene la solución: $x = -1$, $y = 0$ y $z = 0$.
  - De (5), si $y \neq 0$ se tiene, nuevamente de (6) y luego de (4) se tiene $x = 1$ y $z = 1$, también de $y = -\frac{1}{x}$ se encuentra $y = -1$ por tanto se tiene la solución: $x = 1$, $y = -1$ y $z = 1$.

- Cálculo de la segunda derivada: Un cálculo simple da,

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y^2 + 2 & 4xy + 2 & -4 \\ 4xy + 2 & 2x^2 + 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

- Análisis de puntos críticos

  - Punto $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en este punto crítico:

$$f''(-1,0,0)=\begin{pmatrix}2&2&-4\\2&4&0\\-4&0&8\end{pmatrix}_{F_{21(-1)}}\approx\begin{pmatrix}2&2&-4\\0&2&4\\-4&0&8\end{pmatrix}_{C_{21(-1)}}$$

$$\approx\begin{pmatrix}2&0&-4\\0&2&4\\-4&4&8\end{pmatrix}_{F_{31(2)}}\approx\begin{pmatrix}2&0&-4\\0&2&4\\0&4&0\end{pmatrix}_{C_{31(2)}}$$

$$\approx\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&4\\0&4&0\end{pmatrix}_{F_{32(-2)}}\approx\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&4\\0&0&-8\end{pmatrix}_{C_{32(-2)}}$$

$$\approx\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$$

Por tanto: $sig(f''(-1,0,0))=(2,1)$ luego en este punto crítico no se tiene extremo.

- Punto $b=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, en este punto

$$f''(1,-1,1)=\begin{pmatrix}4&-2&-4\\-2&4&0\\-4&0&8\end{pmatrix}$$

$$F_{21(1/2)},C_{21(1/2)},F_{31(1)},C_{31(1)},F_{32(2/3)},C_{32(2/3)}$$

se encuentra:

$$f''(1,-1,1)=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&8/3\end{pmatrix}$$

Luego la signatura de esta matriz es $sig(f''(1,-1,1))=(3,0)$, por tanto $f''(1,-1,1))$ es definida positiva, luego en este punto se tiene un mínimo local. El valor que tiene la función en este punto es $f''(1,-1,1))=-3$.

5. CONCLUSIÓN

Luego de lo anterior, es claro que el problema de determinar si en un punto crítico existe un máximo o un mínimo, no depende, al menos conceptualmente, de la cantidad de variables, pues como se ha visto el cálculo se reduce a simples operaciones elementales de fila.

6. REFERENCIAS

[1] J. de Burgos. *Algebra Lineal.* McGraw-Hill/Interamericana de España, 1993, España.
[2] S. Relos. *Apuntes de Álgebra Lineal,* UMSS, UPB, 2001, Cochabamba, Bolivia.
[3] S. Relos. *Apuntes de Cálculo II,* UMSS, UPB, 2001, Cochabamba, Bolivia.
[4] J. de Burgos. *Cálculo infinitesimal de varias variables,* McGraw-Hill/Interamericana de España, 1995, España.
[5] J. E. Marsden y A. Tromba. *Cálculo Vectorial,* Addison Wesley Iberoamericana, 1991, USA.
[6] F. Ayres Jr. *Matrices,* McGraw-Hill, 1969, USA.
[7] *Matrix Methods,* second edition Richard Bronson, , Academic Press Inc., 1991, USA.