INVESTIGACIÓN & DESARROLLO, No. **5**, Vol. **1**: 55 – 61 (2005)
ISSN 2518-4431

PROYECCIONES DINÁMICAS DE POBLACIONES FEMENINAS POR GRUPOS ETÁREOS

Evelyn Álvarez Sierra* y Mayra Alfaro Medinaceli**
**Universidad Privada Boliviana*
*** Universidad Mayor de San Simón*
ealvarez@upb.edu
(Recibido el 21 de febrero 2005, aceptado para publicación el 7 de noviembre 2005)

RESUMEN

En el presente trabajo se propone un modelo matemático dinámico para estimar el comportamiento de poblaciones en el tiempo tomando en cuenta la estructura de edades. Se discretiza la ecuación diferencial en derivadas parciales que se obtiene como modelo, utilizando el Método Numérico de Líneas. Para su desarrollo computacional, se utilizó el código DASSL y datos de los censos de Bolivia de 1992 y 2001, se comparó los resultados obtenidos numéricamente con los datos reales. Con el modelo propuesto, se realizaron proyecciones del comportamiento de la población femenina; se observó una tendencia al crecimiento en general y, en particular, la estabilidad en la cantidad de individuos con edades entre 70 y 75 años.

Palabras Clave: Poblaciones, Ecuaciones Diferenciales Algebraicas, Modelos Matemáticos, Método Numérico de Líneas.

1. INTRODUCCIÓN

Durante la década de los 60s y 70s se creía que una tasa alta de fertilidad impedía el desarrollo en un país, pues familias con muchos hijos tenían que invertir más dinero en educación y salud, por lo tanto, era difícil la acumulación de riquezas materiales. Pero en los 80s esta visión cambió. Bajo la investigación empírica, los economistas aseguraron que lo que impulsaba al crecimiento económico era el capital humano con la innovación tecnológica y que el crecimiento de la población no afectaba realmente mucho en la economía.

En estos últimos años, se llegó a la conclusión de que la estructura de población afecta a la economía en una forma diferente. Las personas viven más tiempo y disminuye la mortalidad infantil, por lo que la tendencia es de tener menos hijos, lo que lleva, eventualmente, a que por un lado los padres tengan más dinero para invertir en su salud y educación, las mujeres puedan salir a trabajar y por ende se mejora igualmente la fuerza de trabajo. Esta tendencia da lugar a que la edad promedio de la población crezca y la razón entre población productiva y dependiente también aumente, siendo necesario un cambio en las políticas de bienestar social.

Además de estas consideraciones, un gobierno necesita saber cómo implementar planes de desarrollo. Saber cuántas guarderías se necesita construir, cuántos colegios y qué tipos de empleos serán necesarios, cuántos doctores y profesores entrenar y qué tanto de impuestos se debe recaudar para satisfacer las necesidades sociales de la población. En Bolivia, por ejemplo, es necesario estimar cuántas personas mayores de 65 años habrá en los próximos años para destinar el dinero necesario para el Bonosol.

Los estudios actuales del Instituto Nacional de Estadística (INE) con respecto al comportamiento de poblaciones en Bolivia, están basados en interpolaciones y regresiones de datos obtenidos en los censos realizados desde 1952 hasta el 2001[5]. Sin embargo, es posible elaborar y estudiar modelos de poblaciones que se expresan a través de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, los cuales han sido poco utilizados en general, a causa de la complejidad en la utilización de los datos existentes de los censos aplicados a diferentes poblaciones, además de su solución numérica puesto que se hace imposible resolver estas ecuaciones de manera exacta.

En este trabajo se presenta una nueva forma de proyectar el comportamiento de poblaciones en el tiempo por grupos etáreos, a través de ecuaciones diferenciales parciales, mejorando de alguna manera las proyecciones estadísticas que se hacen comúnmente. Además, se analiza la solución numérica del modelo con los datos históricos existentes en el INE de Bolivia y se valida, finalmente, los resultados obtenidos con el censo del 2001.

DOI: 10.23881/idupbo.005.1-4e

2. OBTENCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

Para la obtención del modelo se definen dos variables independientes: edad (*z*) y tiempo (*t*), además de una función continua $\phi(z,t)$ que representa el número de individuos de edad *z* en el instante *t*.

Por lo tanto, para conocer el número de personas *N*(*t*) que existen en una población con edades entre *a* y *b* en un tiempo *t* cualquiera, basta con integrar:

$$\begin{cases} N(t) = \int_a^b \phi(z,t)\,dz \\ 0 < [a,b] < 115 \end{cases}$$

Para el total de la población se tomará *a* = 0 y *b* = 115, considerando *b* la edad máxima.

$$N_{total}(t) = \int_0^{115} \phi(z,t)\,dz$$

Si se considera inicialmente que no existe inmigración ni emigración, la salida de los individuos de la población depende de la mortalidad, o sea, de la cantidad de personas de edad *z* que mueren en un tiempo *t*, *d*(*z*, *t*). Luego, el número de muertes en el instante *t* entre las edades z_1 y z_2 será:

$$M(t) = \int_{z_1}^{z_2} d(z,t)\,dz$$

Para la obtención de un primer modelo se utiliza la ecuación de continuidad. Considerando que la unidad de tiempo se toma en años:

Tasa de Cambio	=	Cantidad de individuos que cumplen la edad z_1	-	Cantidad de individuos que pasan la edad z_2	-	Tasa de muertes

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_1}^{z_2} \phi(z,t)\,dz = \phi(z_1,t) - \phi(z_2,t) - \int_{z_1}^{z_2} d(z,t)\,dz\ . \tag{1}$$

Utilizando el teorema fundamental del cálculo y transformaciones algebraicas, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_1}^{z_2} \phi(z,t)\,dz = -\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial z}\phi(z,t)\,dz - \int_{z_1}^{z_2} d(z,t)\,dz\ .$$

Esta última ecuación da lugar a la ecuación diferencial a derivadas parciales siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(z,t) + \frac{\partial}{\partial z}\phi(z,t) + d(z,t) = 0 \tag{2}$$

Si se define $\mu(z,t)$ como la razón entre las personas que mueren con respecto a la cantidad total de personas de edad *z* (*w* =115):

$$\mu(z,t) = \frac{\mathrm{d}(z,t)}{\phi(z,t)}, \qquad 0 \le z \le w \quad \text{y} \quad 0 \le \mathrm{t} \le \infty \tag{3}$$

y reemplazando en la ecuación (2), se tiene el primer modelo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\phi(z,t)+\dfrac{\partial}{\partial z}\phi(z,t)+\mu(z,t)\phi(z,t)=0 \\ \phi(115,t)=0 \qquad \text{CF} \\ \phi(0,t)=B(t) \qquad \text{CF} \\ \phi(z,0)=C(z) \qquad \text{CI} \end{cases} \tag{4}$$

La función $C(z)$ representa la cantidad de personas con edad z en el momento de empezar el proceso, t = 0, que puede ser por ejemplo el año en que se realizó un censo.

Para el cálculo de $B(t)$, el número de niños que nacen en el momento, se necesita conocer la cantidad de niños que nacen dependiendo del tiempo. Esta función es más complicada, se puede pensar en una función de fertilidad, dependiendo de la edad de la madre y del padre. Sin embargo, ambos padres no necesariamente tienen la misma edad, por esta razón sólo se analizará la función $\phi(z,t)$ como la cantidad de mujeres únicamente, al igual que el resto de las funciones del modelo. El modelo supone igualmente que las personas no viven más de 115 años.

Entonces, la función de fertilidad femenina será:

$$B(t)=\int_a^b m(z,t)\phi(z,t)\,dz$$

con $m(z, t)$ el número de hijas nacidas de madres de edad z en el tiempo t y $[a; b]$ el intervalo donde se considera la fertilidad de la mujer.

Para el estudio de la población boliviana, sería importante incluir en el modelo la variable emigración, debido a la situación económica actual. Por lo tanto, si se considera $E(z, t)$ como el número de personas de edad z que emigran del país, y $\xi(z,t)$ como la tasa entonces:

$$\xi(z,t)=\frac{E(z,t)}{\phi(z,t)}$$

y el modelo se convertiría en :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\phi(z,t)+\dfrac{\partial}{\partial z}\phi(z,t)+[\mu(z,t)+\xi(z,t)]\phi(z,t)=0 \\ \phi(115,t)=0 \\ \phi(0,t)=\int_a^b m(z,t)\phi(z,t) \\ \phi(z,0)=C(z) \end{cases} \tag{5}$$

3. PARÁMETROS DEL MODELO

De acuerdo al modelo presentado en la ecuación (5), para su aplicación se necesitaría conocer la mortalidad, la emigración y la fecundidad en función de las edades y del tiempo. Los datos de fertilidad y la mortalidad de las mujeres se pueden obtener de los datos estimados por el INE [5], pero no se dispone de datos suficientes sobre la migración internacional. Debido a esta falta de datos, se puede aplicar solamente el modelo (4) donde no se considera migración ni emigración.

3.1 Función de Fertilidad

Para determinar la estructura de la fecundidad se analizaron las fuentes disponibles [5] a partir de 1975, tomando las fertilidades en 7 grupos a partir de los 15 años (15-19, 20-24, 25-29, 30-34, 35-39, 40-44, 45-50), Figura 1. En los primeros 4 grupos, la fertilidad van en aumento pero a partir de los 35 años disminuye. Después de los 50 años y antes de los 15 años, se considera que la fertilidad es nula. La fertilidad es una función que, además de la edad, dependen del tiempo ya que las mujeres tienden a tener familias más pequeñas en cada generación. Así, para el período 1990-1995 se determinó la estructura de fecundidad como promedio de las estructuras observadas en el censo 1992 y en la Encuesta de Salud ENDSA 1994 [5], mientras que para 1995-2000 las estimaciones se obtuvieron promediando las estructuras del Censo 2001 y de la Encuesta de Salud ENDSA 1998 [5]. Para los siguientes quinquenios, 2000-2005, 2005-2010, etc., se interpoló en función de los niveles de la tasa global de fecundidad correspondiente a cada uno de ellos.

Las tasas globales de fecundidad en el período 2000-2050 fueron estimadas utilizando la proyección de curva logística:

$$TGF(t) = k_1 + \frac{k_2}{1+e^{a+bt}}$$

con k_2 asíntota superior (7 hijos) y k_1 asíntota inferior (1.7 hijos) y a, b parámetros de la función. En la Figura 1 se muestra la tasa de fecundidad por grupos de edades desde 1975, con intervalos de tiempo de 5 años.

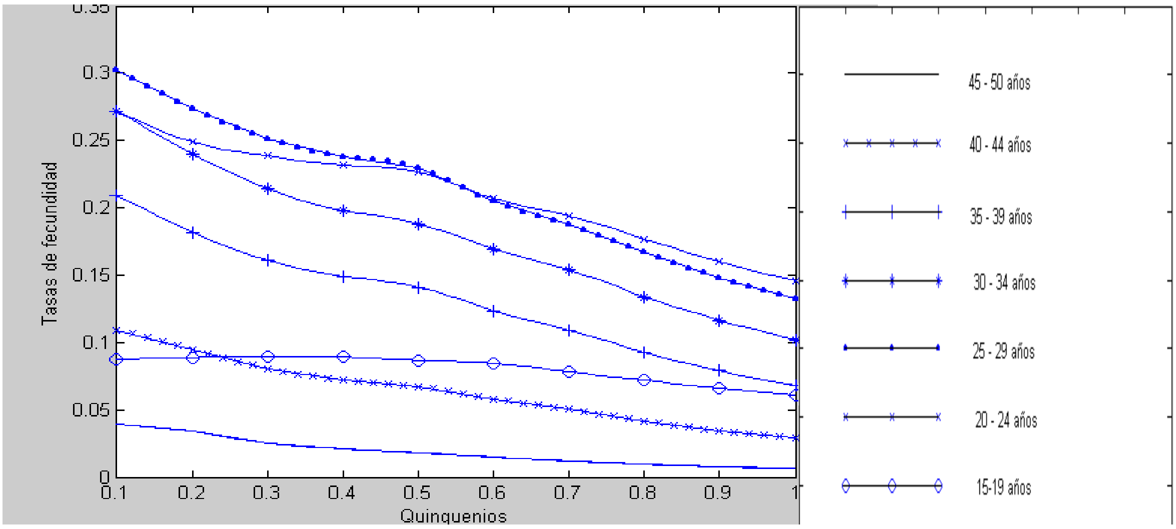

Figura 1 - Tasa de fecundidad por grupos de edades desde 1975, con intervalos de tiempo de 5 años.

3.2 Función de Mortalidad

Para la función de mortalidad, se discretizó la población en edades 0, 1, 5, 10, 15, 20,..., 75, 80, 115 y la estimación consta de dos análisis: mortalidad en los primeros años de vida (0-5) y mortalidad adulta. Los datos utilizados fueron obtenidos de la misma forma que los de fertilidad, al igual que las proyecciones de los años 2000-2005 y para las edades intermedias se realizaron interpolaciones con cerchas cúbicas.

3.3 Población Inicial

La función $C(z)$ representa la cantidad de individuos de edad z en el tiempo 0. Para este estudio se considera el año 1992 como el momento inicial, t = 0, debido a que el censo efectuado ese año es considerado como el primero más completo realizado en Bolivia.

4. DISCRETIZACIÓN DEL MODELO

Para resolver numéricamente el modelo (3) se debe tomar en cuenta los datos disponibles, además de la estructura de la condición de frontera, sobre todo en z = 0, donde se necesita calcular una integral en z. Sin embargo, si se discretiza esta variable, la integral se convierte en una sumatoria exacta. Un método clásico que permite discretizar las edades sería el de diferencias finitas; no obstante, producto del cambio brusco en los datos de las mortalidades, la ecuación que resulta del modelo se puede convertir en una ecuación diferencial rígida (*stiff*), haciendo que el método en diferencia no sea numéricamente estable e imposibilitando la solución numérica del problema. No obstante, el Método de Líneas

(MOL) [1],[3] permite discretizar solamente la edad, obteniéndose un problema de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas (EDA) con valor inicial que sólo depende del tiempo, o sea:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_i(t)}{\partial t} + \dfrac{\phi_{i+1}(t) - \phi_{i-1}(t)}{2\Delta z} + \mu_i(t)\phi_i(t) = 0 \qquad t > 0 \qquad i = 5, 10, 15, ..., 80 \\ \phi_0(t) = \sum_i m_i(t)\phi_i(t)\Delta Z_i \qquad t > 0, \qquad \Delta Z_i = 5 \\ \phi_i(0) = C_i \qquad i = 0, 5, 10, 15, ..., 80 \\ \phi_{115}(t) = 0 \qquad t > 0 \end{cases} \tag{6}$$

En el esquema (6), la función $\phi_i(t)$ representa la cantidad de individuos de edad *i* en función del tiempo t; $\mu_i(t)$ y $m_i(t)$ representan la mortalidad y fertilidad en el momento *t* para individuos de edad *i* y C_i el total de individuos de edad *i* en $t = 0$ (1992).

Para la solución numérica del Sistema de Ecuación Diferencial Algebraica (6) se utilizaron las Fórmulas en Diferencias Hacia Atrás (*Backward Difference Formula*, BDF), una de las herramientas numéricas más fuertes para resolver EDA. El análisis teórico de la convergencia de las BDFs aplicadas a las EDAs, la manera en que se implementan los métodos de multipasos del predictor-corrector, así como las estrategias de selección automática del paso y del orden del método, están documentadas en las referencias [1], [2] y [4].

5. APLICACIÓN NUMÉRICA

Para obtener la solución numérica del modelo, se realizó un programa en FORTRAN 90. Considerando el año 1992 como el inicio del proceso, condición inicial, se introdujeron los datos del INE explicados en la sección 3 y se resolvió un sistema diferencial algebraico de 19 ecuaciones a valor inicial con el código DASSL. Este es un software libre, diseñado por L. Petzold en 1982 en FORTRAN 77, que resuelve numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales algebraicas implícitas y explícitas de índice 0 o 1 de valor inicial, tomando una selección automática del paso según la tolerancia del error prefijada, que en este caso se tomó igual a 10^{-5}.

Para la validación del modelo se compararon los resultados numéricos obtenidos en el trabajo como estimación de la cantidad de población femenina de Bolivia y su estructura de edad para el año 2001, con los datos del Censo reportados por el INE en el mismo año. La comparación numérica y las curvas correspondientes aparecen en la Figura 2.

La curva de la Figura 2 marcada con el símbolo + representa los valores reales y la curva marcada con el símbolo ● los estimados en el trabajo.

A pesar de ser el modelo matemático un problema mal planteado por el cambio brusco de las mortalidades y que los datos de fertilidad y mortalidad manejados son aproximaciones, se puede afirmar que el resultado de la validación es positiva ya que la solución numérica converge con una tolerancia de 10^{-5} y el error relativo de los valores calculados con respecto los datos reales oscila entre 0.01 y 0.15.

En la Figura 3 se presenta los valores numéricos y los gráficos correspondientes de las proyecciones de la población femenina boliviana por grupos etáreos. Ésta fue calculada utilizando el modelo propuesto en el presente artículo para los años 2002, 2012, 2032 y 2052. Se puede observar el crecimiento general de la población, además del comportamiento estable en la cantidad de individuos entre los 70 y 75 años de edad en cada proyección.

Edad	Estimación	Real	Error Relativo
0	99082	98268	0.01
1	94757	101196	0.06
5	96476	110011	0.12
10	91284	102862	0.11
15	90543	92933	0.03
20	84494	87375	0.03
25	82938	71918	0.15
30	74541	67558	0.10
35	63621	55092	0.15
40	59302	55743	0.06
45	49900	43932	0.14
50	40190	36728	0.09
55	30628	27393	0.12
60	26512	24626	0.08
65	23758	23173	0.03
70	18534	21078	0.12
75	14648	13338	0.10
80	9208	9293	0.01
115	0	0	0.00

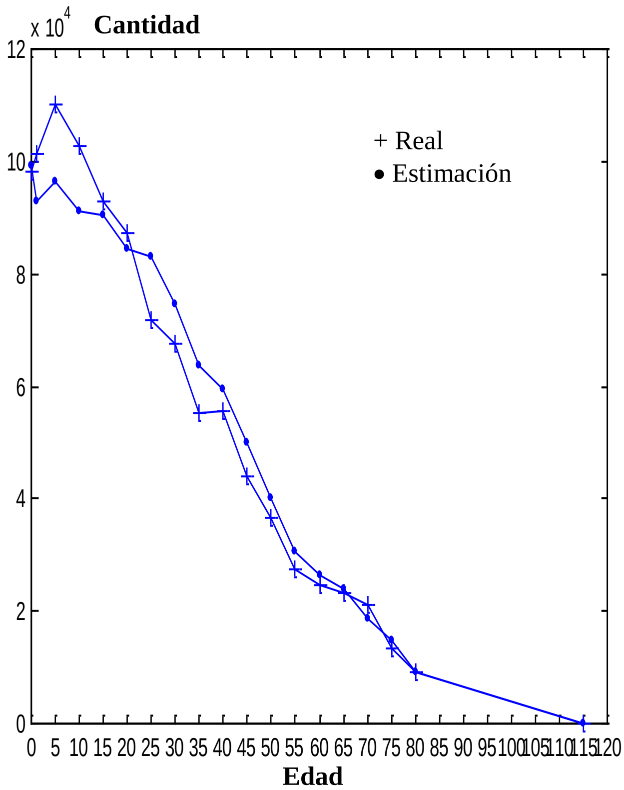

Figura 2 - Comparación de datos estimados con los reales del año 2001.

Proyecciones obtenidas				
Edad	Año 2002	Año 2012	Año 2032	Año 2052
0	99843	107389	127401	159962
1	97485	102702	121404	151671
5	97217	104565	123787	154966
10	91985	98938	116587	145012
15	91238	97134	115559	133590
20	85142	91578	102171	121993
25	83575	89892	98014	119011
30	75113	80791	93369	112911
35	74186	79793	92092	101147
40	59757	64274	82236	99694
45	50283	54084	69198	95669
50	40499	43560	55733	77053
55	34894	37531	48020	66389
60	26715	28735	36765	50829
65	23940	25750	32946	45549
70	16661	17920	22928	31698
75	16776	18044	23087	31919
80	9279	9980	12769	17654
115	0	0	0	0

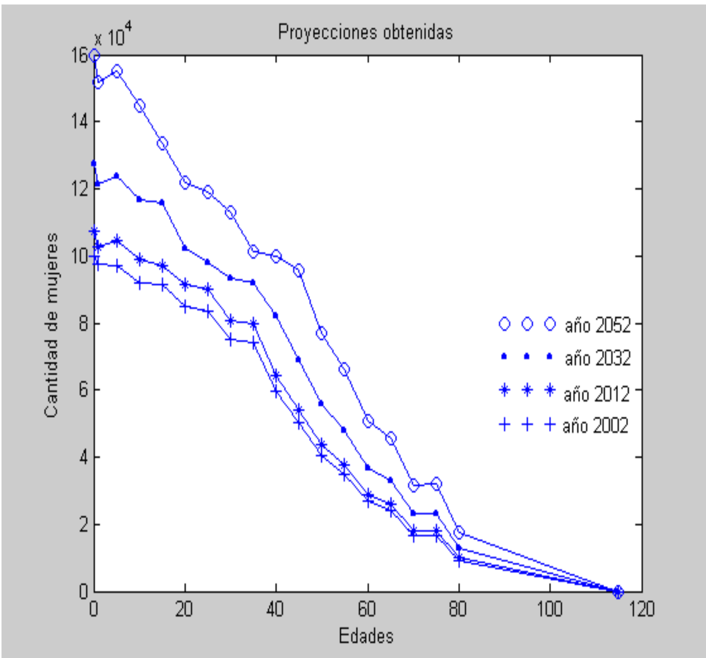

Figura 3 - Proyecciones calculadas de la población femenina boliviana por grupos etáreos.

6. CONCLUSIONES

La realización de un censo de población es un evento sumamente costoso pero, por otro lado, conocer las características de la población de un país se hace imprescindible. Por este motivo se buscan diferentes modelos para su estimación. Los más desarrollados a nivel mundial son del tipo estadístico. En este trabajo se presenta un modelo matemático de forma diferencial que permite estimar la estructura de la población prefijando de antemano el error cometido. En particular, para obtener proyecciones futuras sólo se necesitan parámetros de fertilidad, mortalidad y la cantidad de poblaciones femeninas totales que se extraen de un censo ya realizado, siendo esto una ventaja considerable con respecto a métodos estadísticos, basados en regresiones por ejemplo.

Se utilizaron esquemas numéricos novedosos como el Método de Líneas, combinado con un método eficiente para resolver ecuaciones diferenciales algebraicas, resultando ser una técnica muy útil y original, en particular para problemas numéricamente inestables. Mediante el modelo y el software desarrollado es posible obtener estimaciones hasta el 2050, con posibilidades de aumentar los años de estimación si se conocieran extrapolaciones de datos de mortalidad y fertilidad para años posteriores.

7. REFERENCIAS

[1] K. E. Brenam et al. *Numerical solution of initial value problems of differential-algebraic equations*, Elsevier Publs., 1989.
[2] L. R. Petzold. *A description of DASSL, a differential⁄algebraic solve*r, SANDIA Report, SAND-828637, 1982.
[3] E. Griepentrog and R. März. *Differential-Algebraic Equations and their Numerical Treatment*, Teubner, Leipzig, 1986.
[4] Hindmarsh. *LSODE and LSODI, Two initial value ordinary differential equation solvers*, *ACM SIGNUM Newsletter*, vol. 15, 1980, pp. 10-11.
[5] INE, CEPAL, Fondo de Población de las Naciones Unidas. *Bolivia: Estimaciones y Proyecciones de poblaciones, 1950-2050,* La Paz Bolivia, serie OI, No. 202, 2002.